

SUPERFICIES.	
Una superficie de revolución tiene la ecuación: $x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \text{ girando en torno al eje } z$ $y^2 + z^2 = [r(x)]^2 \text{ girando en torno al eje } x$ $x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \text{ girando en torno al eje } y$	Superficies cuadráticas: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$ Se clasifican en esferas, elipsoides, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de 2 hojas, cilindro elíptico o circular recto, cilindro hiperbólico recto, cono recto, paraboloides elíptico, paraboloides hiperbólico.
DERIVADAS PARCIALES	
Derivadas parciales de orden superior: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy}$ $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy}$	Gradiente de $z=f(x,y)$ $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y)$. Gradiente de $w=f(x,y,z)$ $\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z)$ Si $F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$, entonces un vector normal a la superficie z está dado por: $\nabla F(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$
La derivada direccional de una función $z=f(x,y)$, en la dirección del vector unitario $u=(u_1, u_2)$ en el punto (x_0, y_0) está dada por: $D_u f(x_0, y_0) = u \cdot \nabla f(x_0, y_0) = (u_1, u_2) \cdot (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$	Si la función $z=f(x,y)$, es diferenciable en el punto (x_0, y_0) entonces: $\Delta z \cong dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$
La ecuación del plano tangente a la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto $P=(x_0, y_0, z_0)$ está dada por: $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$	Si la superficie es $z=f(x,y)$, la ecuación del plano tangente en el punto $P=(x_0, y_0, z_0)$ es: $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$
La ecuación de la recta normal a la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto $P=(x_0, y_0, z_0)$ está dada por: $x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t; \quad y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t; \quad z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t$	Si la superficie es $z=f(x,y)$, la ecuación de la recta normal en el punto $P=(x_0, y_0, z_0)$ es: $x = x_0 - f_x(x_0, y_0)t; \quad y = y_0 - f_y(x_0, y_0)t; \quad z = z_0 + t$
Para la superficie $z=f(x,y)$, la diferencial total de z es: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$	REGLA DE LA CADENA (1ª. Versión) Si $z=f(x,y)$ en donde $x=x(t)$; $y=y(t)$, entonces: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$
REGLA DE LA CADENA (2ª. Versión) Si $z=f(x,y)$ en donde $x=g_1(s,t)$; $y=g_2(s,t)$, entonces: $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$	DERIVACIÓN IMPLÍCITA. Si $F(x,y,z)=0$, en donde $z=f(x,y)$, entonces: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARA PUNTOS CRÍTICOS DE FUNCIONES $z=f(x,y)$.

Sea $D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$, donde (x_0, y_0) es un punto crítico de $z=f(x,y)$, entonces:

1. $f(x_0, y_0)$ Es un valor máximo relativo de $z=f(x,y)$ si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$
2. $f(x_0, y_0)$ Es un valor mínimo relativo de $z=f(x,y)$ si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
3. $f(x_0, y_0)$ Es un punto silla de $z=f(x,y)$ si $D < 0$
4. EL CRITERIO NO DECIDE SI $D = 0$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Sea $z=f(x,y)$ y $h(x,y)=c$ una función restricción. Para maximizar (minimizar) a z sujeta a la restricción h , se deberá resolver el sistema:

$$\text{SEA } H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(h(x, y) - c)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

CILINDRICAS (r, θ, z)

$$x = r \cos(\theta); y = r \sin(\theta); z = z; \quad x^2 + y^2 = r^2; \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0, y < 0 \end{cases}$$

$$r \geq 0; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ESFERICAS (ρ, θ, ϕ)

$$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta); y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta); z = \rho \cos(\phi); \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \phi = \cos^{-1}(z/\rho); \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & \text{si } x > 0, y < 0 \end{cases}$$

CAMBIO DE VARIABLE

POLARES $\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_Q f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$

CILINDRICAS: $\iiint_R f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_Q f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$

ESFERICAS: $\iiint_S f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_Q f(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi)) \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$

SEA C UNA CURVA (EN EL PLANO O EN EL ESPACIO) DADA POR:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad \text{CURVA EN EL PLANO}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad \text{CURVA EN EL ESPACIO ENTONCES:}$$

$$\text{VECTOR VELOCIDAD } \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

$$\text{RAPIDEZ } \|\mathbf{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

$$\text{VECTOR ACELERACION } \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_T \mathbf{T}(t) + a_N \mathbf{N}(t)$$

$$\text{VECTOR TANGENTE UNITARIO } \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$\text{VECTOR NORMAL PRINCIPAL UNITARIO } \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

$$\text{VECTOR BINORMAL } \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\text{COMPONENTES DE LA ACELERACION } a_T = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\text{COMPONENTES DE LA ACELERACION } a_N = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t) = \sqrt{\|\mathbf{a}(t)\|^2 - a_T^2} = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} = K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

FORMULAS PARA LA CURVATURA EN EL PLANO

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad \text{C DADA POR } y = f(x)$$

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \quad \text{C DADA POR } x = x(t), y = y(t)$$

FORMULAS PARA LA CURVATURA EN EL PLANO O EN EL ESPACIO

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

$$K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$$

RECUERDE QUE LAS FORMULAS CON PRODUCTOS VECTORIALES SOLO SE APLICAN A CURVAS EN EL ESPACIO

AREA DE LA SUPERFICIE

$$\iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$$

LONGITUD DE ARCO

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL (TRABAJO REALIZADO)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

SI $\mathbf{F}$ ES UN CAMPO VECTORIAL DE LA FORMA $\mathbf{F}(x, y) = M\hat{i} + N\hat{j}$ Y C VIENE DADA POR

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad \text{ENTONCES} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M dx + N dy$$

SI $\mathbf{F}$ ES UN CAMPO VECTORIAL DE LA FORMA $\mathbf{F}(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ Y C VIENE DADA POR

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad \text{ENTONCES} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M dx + N dy + P dz$$

INTEGRAL DE LÍNEA SI C ESTADADA POR $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ $\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ SI C ESTADADA POR $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ $\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$	SEA $F(x, y) = M\hat{i} + N\hat{j}$ UN CAMPO VECTORIAL, F ES CONSERVATIVO SI $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ SEA $F(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ UN CAMPO VECTORIAL, F ES CONSERVATIVO SI $\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = 0$
SEA $F(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ UN CAMPO VECTORIAL. LAS SIGUIENTES CONCLUSIONES SON EQUIVALENTES: 1. F ES CONSERVATIVO. ESTO ES $F = \nabla f$ PARA ALGUNA f 2. $-\int_C F \cdot dr$ ES INDEPENDIENTE DEL CAMINO 3. $-\int_C F \cdot dr = 0$ PARA TODA CURVA C CERRADA ÁREA DE UNA SUPERFICIE PARAMETRICA. AREA DE LA SUPERFICIE $= \iint_S dS = \iint_D \ r_u \times r_v\ dA$ DONDE: $r_u = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{k}$, $r_v = \frac{\partial x}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\hat{k}$	SEA $F(x, y) = M\hat{i} + N\hat{j}$ UN CAMPO VECTORIAL, SI F ES CONSERVATIVO, ENTONCES $\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$ DONDE $f(x, y)$ ES UNA FUNCIÓN POTENCIAL DE F, ES DECIR: $F(x, y) = \nabla f(x, y)$ SEA $F(x, y) = M\hat{i} + N\hat{j}$ UN CAMPO VECTORIAL, LA DIVERGENCIA DE F ES $\text{div} F(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$ SEA $F(x, y, z) = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ UN CAMPO VECTORIAL, LA DIVERGENCIA DE F ES $\text{div} F(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$
TEOREMA DE GREEN $\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$ $\int_C F \cdot dr = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R \text{rot}(F) \cdot \hat{k} dA$ $\int_C F \cdot N ds = \iint_R \text{div}(F) dA$ TEOREMA DE LA DIVERGENCIA (DE GAUSS). Relaciona una integral triple sobre una región sólida Q, con una integral de superficie sobre la superficie de Q $\iint_S F \cdot N dS = \iiint_Q \text{div}(F) dV$	INTEGRALES DE SUPERFICIE $z = g(x, y)$ $ds = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA$ $\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} dA$ Forma escalar $\iint_S F \cdot N dS = \iint_R F \cdot [-g_x(x, y)\hat{i} - g_y(x, y)\hat{j} + \hat{k}] dA$ Forma vectorial (normal hacia arriba) Forma paramétrica $\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) dS$ Forma escalar $\iint_S F \cdot N dS = \iint_R F \cdot [r_u \times r_v] dA$ Forma vectorial
TEOREMA DE STOKES. Establece la relación entre la integral de superficie sobre una superficie orientada S y la integral de línea sobre una curva espacial cerrada que constituye el borde de S. $\int_C F \cdot dr = \iint_S (\text{rot}(F)) \cdot N dS$	